T O P O L O G I A
WPPT I, sem. letni

EGZAMIN POPRAWKOWY II

Wrocław, 13 wrzenia 2004

ZADANIE 1.
Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją ciągłą z przestrzeni metrycznej X w przestrzeń metryczną Y. Który ze wzorów jest prawdziwy dla dowolnego zbioru $A \subset X$?

1. $f(\delta A) = \delta(f(A))$; 2. $f(\delta A) \supset \delta(f(A))$; 3. $f(\delta A) \subset \delta(f(A))$;
4. żaden z powyższych wzorów. 7 p.

ROZWIĄZANIE: 4. Żaden z powyższych. Mianowicie weźmy $f(x) = |x|$ na $\mathbb{R}$ i $A = [-1, 2]$. Teraz δA to $\{-1, 2\}$, obraz tego brzegu to $\{1, 2\}$. Natomiast obraz zbioru A to $[0, 2]$ i jego brzeg to $\{0, 2\}$. Nie ma żadnego zawierania (a tym bardziej równości) między zbiorami $\{1, 2\}$ i $\{0, 2\}$.

ZADANIE 2.
Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną i $f : X \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją rzeczywistą określoną na X. Sprawdź, czy

$$d'(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|$$

jest metryką na X? 7 p.

ROZWIĄZANIE: Tak, jest to metryka, bo: 1. Jeśli $x = y$ to $d'(x, y) = 0 + 0 = 0$, jeśli zaś $x \neq y$, to już samo $d(x, y)$ jest większe od zera, a tym bardziej $d(x, y)$ plus coś nieujemnego. 2. Oczywiście $d'(x, y) = d'(y, x)$. 3. $d'(x, y) + d'(y, z) = d(x, y) + |f(x)-f(y)|+d(y, z)+|f(y)-f(z)| = d(x, y)+d(y, z)+|f(x)-f(y)|+|f(y)-f(z)| \leq d(x, z) + |f(x) - f(y) + f(y) - f(z)| = d(x, z) + +|f(x) - f(z)| = d'(x, z)$.

ZADANIE 3.
Udowodnij, że jeśli funkcja f z zadania 2 jest ciągła, to metryka d' jest równoważna z d. 8 p.

ROZWIĄZANIE: Niech ciąg x_n punktów z X dąży do x_0 w d. Czyli $d(x_n, x_0) \to 0$. Z ciągłości f ciąg $f(x_n)$ dąży do $f(x_0)$ w $\mathbb{R}$, czyli $|f(x_n) - f(x_0)| \to 0$. Zatem $d'(x_n, x_0) = d(x_n, x_0) + |f(x_n) - f(x_0)|$ również dąży do zera, czyli x_n dąży do x_0 w d'. Na odwrót, niech x_n dąży do x_0 w d'. Czyli $d'(x_n, x_0) = d(x_n, x_0) + |f(x_n) - f(x_0)| \to 0$. Ponieważ $0 \leq d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_0) + |f(x_n) - f(x_0)|$, to z twierdzenia o trzech ciągach, $d(x_n, x_0) \to 0$, czyli x_n dąży do x_0 w d.

ZADANIE 4.
Podaj przykład funkcji nieciągłej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dla której metryka d' z zadania 3 (mimo nieciągłości f) jest metryką zupełną. 7 p.

ROZWIĄZANIE: Na przykład $f(x) = \frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$ i $f(0) = 0$. Jest to funkcja nieciągła w zerze. Weźmy ciąg x_n podstawowy w d'. Wtedy x_n jest podstawowy, a więc zbieżny do jakiegoś x_0, w zwykłej metryce na $\mathbb{R}$ i dodatkowo ciąg $f(x_n)$ jest podstawowy (więc zbieżny). Z tego wynika, że x_0 jest różne od zera, bo gdyby x_n dążyło do zera, to $f(x_n)$ byłby rozbieżny (jest taka możliwość, że $x_0 = 0$, ale tylko gdy ciąg $x_n = 0$ od pewnego miejsca). Skoro $x_0 \neq 0$, to f jest ciągła w x_0, zatem $f(x_n)$ dąży do $f(x_0)$, a stąd już łatwo wynika, że x_n dąży do x_0 w d' (a jeśli zaś $x_n = 0$ od pewnego miejsca, to też jest to ciąg zbieżny w d')

ZADANIE 5.
Zbadaj zbieżność ciągu rekurencyjnego (w razie zbieżności oblicz granicę)

$$a_0 = 1410$$
$$a_{n+1} = \frac{\pi \cos(a_n)}{3\sqrt{3}}.$$

7 p.

ROZWIĄZANIE: Rozważmy odwzorowanie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane wzorem $f(x) = \frac{\pi\cos(x)}{3\sqrt{3}}$. Pochodna tego odwzorowania istnieje wszędzie: $f'(x) = -\frac{\pi\sin(x)}{3\sqrt{3}}$ i jej wartość bezwzględna nie przekracza $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$, co jest stałą mniejszą od 1. Zatem f jest odwzorowaniem zbliżającym na całym $\mathbb{R}$. Stąd a_n, jako ciąg kolejnych iteracji startujących z jakiegoś punktu (konkretnie z 1410, co jednak nie ma tu żadnego znaczenia) jest zbieżny, a granicą jest jedyny punkt stały odwzorowania f. Łatwo się sprawdza, że $x_0 = \frac{\pi}{6}$ jest punktem stałym, więc to musi być ta granica.

ZADANIE 6.
Niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją rzeczywistą ciągłą na przestrzeni metrycznej zwartej X. Wykaż, że f jest ograniczona. 7 p.

ROZWIĄZANIE: Ustalmy $\epsilon = 1$. Z ciągłości f, każdy punkt $x \in X$ ma otoczenie U_x takie, że $y \in U_x \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$, czyli $f(x) - 1 < f(y) < f(x) + 1$. Zbiory U_x pokrywają X. Ze zwartości, istnieje podpokrycie skończone. Czyli istnieje skończenie wiele punktów $x_1, x_2, \ldots, x_n$, takich że $X \subset U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \cdots \cup U_{x_n}$. Niech $C = \min\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\} - 1$ i $D = \max\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\} + 1$ (C i D są skończone). Wykażemy, że dla dowolnego $y \in X$ zachodzi $C < f(y) < D$. Mainowicie każdy y należy do co najmniej jednego ze zbiorów U_{x_i} ($i = 1, 2, \ldots, n$). Wtedy $f(x_i) - 1 < f(y) < f(x_i) + 1$, a ponieważ $C \le f(x_i) - 1$ i $f(x_i) \le D + 1$, więc tym bardziej $C < f(y) < D$.

ZADANIE 7.
Niech A będzie podzbiorem prostej $\mathbb{R}$ ze zwykłą metryką zdefiniowanym następująco:

$$A = \Big\{ x : \text{dla każdego } n \in \mathbb{N} \text{ istnieje liczba wymierna } \tfrac{p}{q},\ (q \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{Z}), \text{ taka że } q > n \text{ oraz } |x - \tfrac{p}{q}| < \tfrac{1}{q^5} \Big\}.$$

Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe, a które nie?

1. A jest zbiorem I kategorii; 2. A pokrywa się ze zbiorem liczb wymiernych;
3. A jest zbiorem rezydualnym; 4. A jest zbiorem pustym. 7 p.

ROZWIĄZANIE: 3. A jest zbiorem rezydualnym. Pozostałe są fałszywe.
Uzasadnienie: Po pierwsze, A zawiera wszystkie liczby wymierne, bo każdą taką liczbę można zapisać jako $\frac{p}{q}$ z dowolnie dużym mianownikiem q (przez rozszerzanie ułamka). Wtedy $|\frac{p}{q} - \frac{p}{q}| = 0$, a to jest mniejsze od $\frac{1}{q^5}$. W szczególności A jest zbiorem gęstym (to też eliminuje odpowiedź 4.). Można zapisać

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{q \ge n} \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \left(\tfrac{p}{q} - \tfrac{1}{q^5}, \tfrac{p}{q} + \tfrac{1}{q^5} \right),$$

a to jest ewidentnie zbiór typu G_δ (sumy przedziałów otwartych są otwarte, a pierwszy przekrój jest przeliczalny). Zatem A jest rezydualny. Fałszywość 1. i 2. wynika z twierdzenia Baire'a (i tego, że $\mathbb{R}$ ze zwykłą metryką jest zupełna): zbiory I kategorii (w tym zbiór liczb wymiernych) nie są jednocześnie rezydualne.

Tomasz Downarowicz